La enseñanza de la noción de probabilidad

Liliana Gysin

En Chemello, G. (comp) Estrategias para la Enseñanza de la Matemática, Universidad Virtual de Quilmes, 2000

6.1. Introducción

La enseñanza de la probabilidad en el nivel escolar es uno de los temas que ha captado la atención de numerosos investigadores. Por otra parte, estos temas que anteriormente estaban reservados para los últimos años de la escuela media, han sido incluidos desde los primeros años en los curriculum de diferentes países.

En nuestro país en particular, a partir de la transformación curricular encontramos contenidos probabilísticos desde el primer ciclo de la EGB, lo que puede enmarcarse en el cambio propuesto en la enseñanza de la matemática, que promueve acercar a los alumnos a conocimientos disciplinares, que los capaciten en la comprensión y modelización no sólo de fenómenos deterministas sino también de los aleatorios.

El hecho de que las probabilidades hayan estado ausentes de la escuela elemental no es ajeno a su desarrollo histórico dentro de la disciplina. Como dice Santaló (1995): "Los problemas que no se podían resolver exactamente, como son aquéllos en los que interviene el azar, se consideraron ajenos al tratamiento de la matemática, con lo cual se conformó una especial formación intelectual sesgada hacia el determinismo". Inicialmente las probabilidades no formaban parte de los conocimientos disciplinares pero, cuando esto se dio, también se introdujeron en la enseñanza, en el nivel universitario. A fin de acercarlo a este desarrollo, presentamos en primer lugar una breve referencia histórica sobre las probabilidades, tomada de un trabajo anterior (Gysin, L. y otros 1998).

Que las nuevas tendencias incluyan, como decíamos, la enseñanza de la probabilidad desde los primeros años de escolarización, también está relacionado con la utilización creciente del cálculo de probabilidades. Las teorías más modernas de la física, por ejemplo, son aleatorias. Ya no se predice con exactitud el estado de un sistema en un momento futuro, sino con una cierta probabilidad. Si bien las leyes generales de la física siguen siendo deterministas, los casos particulares son esencialmente aleatorios.

Los nuevos programas se elaboraron con la intención de dar oportunidad a los alumnos en la escuela de trabajar también con situaciones donde movilicen un modo de hacer y de pensar probabilístico: "Esta matemática, menos precisa, es más útil que la tradicional por tratar las ciencias no exactas y no hay duda de que debe ser incluida en la educación general" (Santaló L., 1998). En muchas ocasiones en que no es posible dar resultados exactos, es muy importante conocer resultados aproximados: *"Si logramos predecir que ¡a temperatura de pasado mañana a las diez estará comprendida entre 12º y 16º centígrados habremos dicho mucho, aun sin dar el valor exacto. Si en economía se puede llegar a predecir que con tal o cual medida del gobierno la desocupación aumentará, ya se tiene un dato de gran valor, aun sin saber el número exacto de personas que quedarán sin trabajo"* (Santaló L., 1998).

En general en la escuela, esto se ha traducido en el tratamiento aislado de algunos temas de probabilidades en algunos cursos, predominando en la mayoría de los casos el enfoque laplaciano, sobre el que volveremos más adelante. Hoy se considera insuficiente este tratamiento, se pretende que las probabilidades y la estadística se presenten *"como facetas de un pensar matemático que incluye el pensar determinista junto con el aleatorio"* (Santaló).

Santaló nos habla de dos modos diferentes del pensar matemático. Los investigadores en didáctica hablan de presentar un conjunto de problemas en el que la noción de probabilidad sea un instrumento de resolución, problemas donde la noción aparezca en diferentes contextualizaciones, con diferentes significados y dando lugar a diferentes representaciones. En ambos casos la idea subyacente es la de presentar en el aula un modo de hacer y pensar la matemática que permita a los alumnos una actividad modelizadora, "una buena reproducción de la actividad científica". Para ampliar la idea de qué matemática estamos pensando, le recomendamos la lectura de Gysin L.(1997).

La presentación de los temas probabilísticos puede realizarse desde distintos enfoques: el frecuencial y el laplaciano. En el primero, se presenta la noción de probabilidad, en combinación con la estadística. Éste apela al significado de probabilidad como límite de las frecuencias relativas, y lo presentaremos en este módulo a partir de la experiencia extraída de Henry, A y M (1996), y en la actividad donde se usan tablas de números al azar. En el segundo enfoque se presenta la noción de probabilidad a partir de la relación parte-todo. Es el postulado por Laplace y el utilizado en el cálculo de probabilidades teóricas. En relación a este enfoque presentamos aquí algunas de las preguntas planteadas por Fischbein y Schnarch (1997) en un estudio sobre la persistencia de errores y dificultades de los alumnos y docentes, al resolver problemas que involucran estas nociones.

En el último apartado analizaremos algunas actividades para trabajar la idea de probabilidad con alumnos de distintos niveles.

6.2. Referencia histórica

Desde tiempos remotos, el hombre ha estado enfrentado a la toma de decisiones. Para tomar decisiones nos apoyamos fuertemente en nuestra expectativa respecto del futuro. La pregunta sería entonces, ¿cómo medimos esta expectativa? Analizamos las opciones, algunos posibles cursos de acción y sus resultados y pesamos cuál de ellos es el que nos parece que va a ocurrir. Al hacer esto, estamos asignando una probabilidad de manera informal. El éxito que tengamos dependerá, en gran medida, de cuan acertadamente pesamos los posibles resultados de uno u otro curso de acción, es decir, de cuan acertadamente asignamos las probabilidades.

¿Y de qué depende esta asignación informal (o formal) de un número?
¿En qué basamos nuestra expectativa respecto del futuro? Esto tiene mucho que ver con nuestra experiencia previa, con nuestra formación y con nuestra cultura; y esto a su vez está relacionado con los desarrollos científicos, sociales y tecnológicos de la época.

Tomemos, por ejemplo, la época de Aristóteles, cuando el pensamiento científico se apoyaba en las hipótesis de "no hay efecto sin causa" y de "hipótesis iguales conducen a consecuencias iguales". La pregunta esencial de los científicos era ¿por qué? Desde la idea preconcebida de que no hay efecto sin causa, lo que se buscaba eran las causas de los fenómenos.

Cuando aparece en escena Galileo (1564 -1642), cambia la pregunta.

"¿Por qué? ¿Por qué esto? ¿Por qué aquello? Éstas eran las preguntas hechas por el buen pastor Aristóteles y baladas por sus ovejas a lo largo de los siglos. ¿Por qué los cuerpos pesados caen? 'Porque', dice Aristóteles, 'cada cuerpo busca su lugar natural'. Él razona como si un objeto inanimado fuera un animal que busca a su compañero. A Galileo ¿le sirve de aclaración este

razonamiento?. No, porque ha nacido en tiempos modernos. Él tenía que discutir este punto en el clima intelectual de su época.
Galileo, increíblemente moderno, hizo una pregunta mejor: no '¿Por qué?', sino '¿Cómo?'. La pregunta exigía una descripción exacta del fenómeno que se estaba estudiando...". (Polya, 1994)

Galileo hizo la pregunta adecuada y fundó, a partir de la respuesta que halló, una nueva ciencia. Después de él vendría Newton a confirmarla y desarrollarla. Pero la predominancia de la filosofía natural de Galileo y el cálculo de Newton, no hicieron más que afianzar la idea de la matemática como una ciencia exacta, dejando todavía fuera de la disciplina al cálculo de probabilidades.

Aún P. S. de Laplace (1749-1827) consagra en su Ensayo filosófico sobre las probabilidades (1820) la idea determinista al decir: "Una inteligencia que en un determinado instante pudiera conocer todas las fuerzas que impulsan la naturaleza y la respectiva posición de los seres que la componen y que, además, tuviera la suficiente amplitud para someter esos datos al análisis, incluiría en una sola fórmula los movimientos de los mayores cuerpos del universo y los más Ínfimos átomos; nada le escaparía y tanto el pasado como el futuro estarían en su presencia." (citado por Santaló). La física debió esperar hasta nuestro siglo para incluir el cálculo de probabilidades en sus teorías. Hoy podemos decir que la ley general sigue siendo determinista, pero el acontecimiento particular es esencialmente aleatorio.

Fue Galileo el primer científico de fama que se ocupó de un problema de probabilidades, al analizar un juego de dados llamado "el pasadiez" que consiste en:

Tirar simultáneamente 3 dados y sumar los puntos obtenidos. Si la suma es superior a 10, se gana. Si no, se pierde.
Si analizamos un pasadiez para dos dados, y considerando la suma menor o igual a 10, los casos posibles son todos los pares de números compuestos por un número del 1 al 6 en el primer dado, y un número del 1 al 6 en el segundo dado. Son 36 casos posibles. ¿Cuáles son los favorables? Todos menos (5,6), (6,5) y (6,6). 33 sobre 36. No hay forma de tener igual chance de ganar y perder, no hay manera de hacer juego limpio.
¿Es el pasadiez con 3 dados un juego equitativo?

Tengamos en cuenta que el cálculo de probabilidades aparece ligado fuertemente a los juegos de azar y, como dice Santaló (1995), era "considerado censurable desde el punto de vista moral". Así, el naturalista francés George Louis Leclerc, conde de Buffon (1707-1788), en su Ensayo de Aritmética Moral (1777) decía: "los juegos de azar, por su naturaleza misma, son un contrato vicioso desde su origen, contrato perjudicial a cada contratante en particular y al bien común de toda la sociedad'. Él tuvo la curiosa idea de estudiar la probabilidad de un problema que se conoce con el nombre de "la aguja de Buffon".

Lanzar una aguja de 2 cm de longitud sobre un papel con rayas paralelas separadas 4 cm. ¿Cuál es la probabilidad de que la aguja quede tocando una raya?

La solución se puede obtener mediante el cálculo infinitesimal, y resulta ser precisamente 1: π = 1: 3,141592 = 0,318309. Es decir que, aproximadamente un tercio de las veces que se tire una aguja, ésta quedará tocando la raya.

Se atribuye a Palamendes el haber enseñado a sus compatriotas un juego de dados durante el sitio de Troya, alrededor de los siglos X y XI a.C. También aparecen menciones de juegos de dados en los libros sagrados de la India que datan del año 2000 a.C.

Otro problema, el de cómo dividir las ganancias entre dos jugadores cuando estas corresponden al primer jugador que obtenga n puntos, y el juego resulta interrumpido cuando el primero lleva ganados p puntos y el segundo q, aparece en la Summa de Luca Paccioli (1445-1514) y en libros de Cardano (1501-76, jugador empedernido que publicó un manual del jugador), Tartaglia y otros.

Sin embargo, el origen de la teoría de probabilidades se atribuye a la correspondencia mantenida entre Blaise Pascal (1623-62) y Pierre de Fermat (1601-65) sobre un problema propuesto a Pascal por Antoine Gombaud, Chevalier de Mere (1610-85), en 1654. Éste pedía a Pascal que le explicara por qué era más ventajoso sacar por lo menos un 6 en cuatro tiradas de un dado que sacar por lo menos un doble 6 en 24 tiradas de 2 dados (a pesar - decía el caballero de Mere - que 4 es a 6 como 24 es a 36).

Las aplicaciones en el siglo XVII a cuestiones de seguros, atrajo a matemáticos a la teoría de probabilidades subyacente. Abraham De Moivre(1667-1754) utilizó probabilidades en su Doctrine of Chances. Se buscaron nuevos campos de aplicación. El mismo Buffon, director del "París Jardín du Roi" dio el primer ejemplo de probabilidades geométricas, también en relación al "problema de la aguja de Buffon" mencionado.
También se trató de calcular, por ejemplo, la probabilidad de que un tribunal acierte el juicio, suponiendo que se puede asignar a cada juez un número que mida la probabilidad de que diga o entienda la verdad. Esta "probabilité desjugements" aparece desarrollada en el trabajo de Antoine Nicolás Caritat, Marquis du Condorcet (1743-1794), una de las víctimas de los excesos de la revolución francesa. Una de sus conclusiones fue que la pena de muerte debía abolirse, porque no importaba cuan grande fuera la probabilidad de acertar una decisión, hay una alta probabilidad de que en el transcurso de varias decisiones, alguna persona inocente sea condenada equivocadamente.

En 1713, ocho años después de la muerte de su autor, se publicó el libro Ars Conjectandi, de Jacobo Bernoulli (nacido en Suiza, en 1654), donde propone su modelo binomial para el cálculo de probabilidades de pruebas repetidas. En honor a su autor también se conoce el modelo como de las "pruebas de Bernoulli". Este fue el primer libro significativo sobre teoría de probabilidades.

En 1812, un siglo más tarde, se publicó la Théoríe Analitíque des Probabilités de P.S. de Laplace, que fue la base de los desarrollos en la teoría de los siglos XIX y XX.

6.3. Los alumnos, el azar y la probabilidad

En la perspectiva de considerar que los alumnos se enfrentan a los nuevos conocimientos que se presentan en clase con ideas y conocimientos construidos previamente, varias son las investigaciones que se han llevado adelante desde diferentes perspectivas para conocerlos.

6.3.1. Persistencia de errores habituales en la interpretación del azar Las investigaciones más conocidas son las clásicas de Piaget Inhelder (1951) centradas en la probabilidad en el sentido clásico laplaciano, dentro de la perspectiva del desarrollo conceptual, y las de Fischbein (1975) quien explora las que denomina intuiciones, considerándolas adquisiciones cognitivas que intervienen directamente en las acciones prácticas o mentales.

En un trabajo de 1997, Fischbein y Schnarch presentan un breve reporte sobre el análisis de la 'evolución con la edad' de algunas ideas en relación con la probabilidad. Para ello elaboraron 7 problemas con varias respuestas posibles, que presentaron a alumnos de 5º (10-11 años), 7º (12-13

años), 9º (14-15 años), 11º (16-17 años) y alumnos de profesorados de formación docente, solicitando marcar la respuesta correcta.
Problemas y porcentajes de respuestas de los alumnos:

Problemas	**Porcentajes**				
Año	5º	7º	9º	11º	Fd
1. Representatividad En un juego de loto se deben elegir 6 números de entre 40. Vered eligió 1,2, 3,4,5,6 y Ruth eligió 39,1,17,33,8,27. ¿Quién tiene mayor probabilidad de ganar?					
Vered	0	0	0	0	0
Ruth (principal idea errónea)	**70**	**55**	**35**	**35**	**22**
Ambos tienen la misma (correcta)	30	45	65	65	78
2. Efectos positivos y negativos de recurrencia Al arrojar una moneda hay 2 resultados posibles: cara y ceca. Ronni arrojó la moneda tres veces y obtuvo cara en los tres casos. Ronni quiere arrojar nuevamente la moneda. La probabilidad de obtener cara otra vez es:					
Menor que la de obtener ceca (principal idea errónea)	**35**	**35**	**20**	**10**	**0**
Igual a la de obtener ceca (correcta)	40	55	70	90	94
Mayor que la de obtener ceca	0	5	0	0	6
Otras respuestas	25	5	10	0	0
3. Eventos simples y compuestos Arrojamos simultáneamente dos dados. ¿Cuál de los siguientes resultados es más probable que ocurra?					
El par 5-6 (correcta)	15	20	10	25	6
El par 6-6	0	0	0	0	0
Ambos tienen la misma probabilidad (p. idea errónea)	**70**	**70**	**75**	**75**	**78**
Otras respuestas	15	10	15	0	16
4. Heurística de disponibilidad Comparar el número de posibilidades al elegir un grupo de 2 personas para representar a 10 candidatos, y el número de posibilidades al elegir un grupo de 8 personas para representar a los 10 candidatos.					
El primero es menor	20	5	10	0	22
Son iguales (correcta)	0	5	5	15	6
El primero es mayor (principal idea errónea)	**10**	**20**	**65**	**85**	**72**
Otras respuestas	15	30	15	0	0
Sin respuestas	55	40	5	0	0

El resultado del estudio del porcentaje de respuestas correctas, es que en algunos casos aumentan, en otros disminuye y sólo en uno permanece estable.

Los autores finalizan las conclusiones diciendo, desde su marco interpretativo:

"Creemos que puede ser útil discutir, durante la enseñanza de las probabilidades, problemas como los aquí analizados. Hay muchos de ellos en la literatura... La probabilidad requiere, una manera de pensar que es genuinamente diferente de aquella requerida por la mayoría de la matemática escolar" y posteriormente agregan "Al aprender probabilidades los alumnos deben crear nuevas intuiciones. La instrucción puede llevarlos a experimentar activamente los conflictos entre su esquema intuitivo primario y los tipos particulares de razonamiento específicos de situaciones estocásticas. Si los alumnos pueden aprender a analizar las causas de los errores, pueden ser capaces de superarlos y de lograr un genuino modo de pensar probabilístico." (Fischbein, 1997).

Análisis de los problemas y la evolución de los porcentajes de respuestas:

Los dos primeros problemas, ligados a la representatividad y a la recurrencia o repetición de resultados, son los que muestran un avance, según la edad de los encuestados.
El error en el segundo problema, está relacionado con la idea de que el azar tiene memoria. Este error es muy frecuente en los adultos sin formación matemática superior. Si entre dos resultados posibles uno se ha repetido varias veces, se tiende a creer que en la próxima experiencia el otro tiene mayor probabilidad.

Por ejemplo, es común encontrar en los locales de apuestas de quiniela, una lista con los resultados de los últimos sorteos, ya que mucha gente analiza cuáles fueron los números que salieron en las últimas jugadas, o cuál es el número que menos ha salido en los últimos sorteos para decidir su apuesta. El argumento para justificar esta conducta suele ser que como en un número muy grande de sorteos, todos los números deben salir aproximadamente la misma cantidad de veces, el que menos ha salido hasta ahora tiene una mayor probabilidad. Pero la realidad es que no podemos decir nada sobre el sorteo específico del día de hoy. La ley general no nos dice nada sobre el resultado particular (como en física). Es cierto que en las próximas experiencias, la frecuencia relativa de los números tenderá a estabilizarse, pero ello no nos permite afirmar nada sobre el resultado particular de la próxima experiencia.

En el primero y el tercer problema, el concepto involucrado con más fuerza es la noción de equiprobabilidad. Este es uno de los temas cruciales en el cálculo de probabilidades, especialmente porque si los sucesos analizados no son equiprobables, la fórmula de Laplace que define la probabilidad como el cociente entre el número de casos favorables y el número de casos posibles no es aplicable, siempre que estos sean igualmente posibles. La aproximación frecuencial es una excelente herramienta para analizar la equiprobabilidad o no de los sucesos.

En el cuarto problema, aparece una situación nueva, relacionada con cómo contar, o con cómo es más concerniente elegir. Esta apunta a las propiedades de los números combinatorios y sus significados. Al pedir comparar, el número de posibilidades para elegir respectivamente 2 u 8 personas de un grupo de 10, tendemos a creer que hay más maneras de elegir 2. Una pregunta alternativa que puede guiar a los alumnos en la interpretación correcta es preguntarles si da lo mismo elegir a los que van como representantes (2 entre 10) que elegir a los que no van (8 entre 10).

En muchos casos el cálculo de probabilidades permite reinvertir nociones de combinatoria.

6.3.2. El contexto y las concepciones

En investigaciones más recientes, y en la perspectiva de la didáctica de la matemática, queremos mencionar dos trabajos que aportan elementos para la comprensión del modo de apropiación de los alumnos de las nociones de probabilidad y azar. En uno de ellos, Maury, estudia los argumentos que los alumnos de quinto de secundaria utilizan para resolver problemas de cuantificación de probabilidades. En el otro, Rouan y Pallascio, estudian las concepciones de estudiantes de 18 - 19 años, sobre las nociones de azar y probabilidad.

Maury (1984) se propuso identificar los factores que intervienen en los argumentos utilizados por los alumnos en la resolución de situaciones problema. Estudió el efecto sobre el argumento de dos factores: el contexto y el vocabulario utilizado en la presentación de los problemas. En ambos casos se presentan dos versiones del problema, una con un vocabulario más técnico y otra en lenguaje corriente. Las situaciones que se presentan son dos:

- Dos bolsas, cada una con una cantidad conocida de bolas rojas y azules. Se trata de elegir de qué bolsa conviene sacar una bola para tener mejor chance de sacar una bola de un color dado, y explicar por qué.
- Dos ruletas, cada una dividida en sectores iguales, algunos sectores son rojos y otros azules. Se trata de ruletas en las que la agujita marca un sector al detenerse, hay que elegir la que da mejor chance para que la agujita se detenga en un color dado.

Como resultado de la investigación su autor señala que el contexto del problema tiene un claro impacto sobre los argumentos utilizados, tanto en el caso de los argumentos pertinentes como en los no pertinentes. Esto sugiere que los alumnos disponen de varios modelos espontáneos, y que la movilización de uno de ellos depende, entre otros factores, del contexto interviniente. Por otra parte confirma que en la resolución de un problema intervienen otros factores que los directamente ligados a su estructura matemática.

Rouan y Pallascio (1994) señalan en su trabajo la diferencia con otras perspectivas pues, para ellos, *"una concepción es una construcción mental que se elabora a partir de la interacción de una nueva experiencia de un sujeto con sus conocimientos anteriores, a través de un razonamiento".*

Estos autores se propusieron identificar cinco concepciones, algunas sobre la noción de azar y otras sobre la noción de probabilidad. Como resultado de la investigación señalan ciertas hipótesis concernientes a cada una de las concepciones anticipadas.
A continuación detallamos la descripción de cada una de esas conclusiones e incluimos algunas hipótesis en las conclusiones.

A. Concepción: *El azar se encuentra principalmente en la actividad lúdica*

Si se pide dar ejemplos de eventos debidos al azar, los sujetos sólo mencionarán ejemplos de juegos, y si se les pregunta si "la lluvia caerá mañana" es un suceso fortuito o no, responden que no porque se puede saber por el parte meteorológico.

Conclusión:
La primera concepción no fue confirmada por la experimentación, las concepciones sobre la noción de azar no están necesariamente ligadas a los juegos. Se vio sí, que esas concepciones tienen componentes lingüísticos (la carga semántica de la palabra azar) o culturales (pensamiento determinista, supersticiones, etc.) que se oponen a una modelización matemática de la aleatoriedad

y al desarrollo de una dimensión probabilista en el razonamiento de los alumnos.

De este estudio podemos armar dos nuevas hipótesis: las limitaciones en las adquisiciones y en los significados lingüísticos de la palabra 'azar' son las que impiden la abstracción y la generalización de esta palabra; y la enseñanza de las probabilidades no favorece esta abstracción sino que se opone a ella.

B. Concepción: ***El azar se puede controlar por la experiencia***

Según esta concepción, si una persona juega seguido adquiere habilidades y estrategias que le ayudan a ganar. Esta concepción marca un deseo de hacer desaparecer lo aleatorio de los juegos de azar.

Conclusión
La concepción sobre el control del azar, sin ser dominante, fue confirmada. Sin embargo, Rouan y Palíaselo consideran necesario estudiarla en otras situaciones.

C. Concepción: La equiprobabilidad y el rechazo de la medida

Es el rechazo a considerar todos los datos o condiciones eventuales relativas a la situación en cuestión.

- *Equi-ignorancia:* todos los resultados, sean conocidos o no, tienen la misma probabilidad, y esto se traduce en que todos los resultados están rodeados de la misma parte de ignorancia.
- *Equi-posibilidad:* todos los resultados tienen posibilidad de aparecer, es interpretado como igualdad de posibilidades de aparición.
- *Modelo dicotómico:* una tercera concepción de equiprobabilidad reposa sobre la igualdad de chances de aparición y no aparición de cada uno de los resultados tomados separadamente, con 50% cada una.
- *Modelo de Pascal:* el que reposa sobre el número de resultados posibles, es decir si hay n resultados posibles, la probabilidad de cada uno será 1:n. Se diferencia de otros porque la probabilidad se expresa numéricamente.

Conclusión
En cuanto a las diferentes concepciones de equiprobabilidad, están ampliamente expresadas en la experimentación. Se muestran de dos formas:

- una forma *que apela a la cuantificación, es decir a la evaluación numérica de la probabilidad (un porcentaje, una relación). Proviene de una hipótesis de simetría o de equitatividad del azar, o del 'a priori' de la igualdad de chances.*
- *Una forma que apela a un juicio no cuantificado de equiprobabilidad. Esto último está basado en la ignorancia y en la imposibilidad de cuantificación ligadas al carácter fortuito.*

En algunos casos la elección de la equiprobabilidad es rechazada por la confusión entre probabilidad y frecuencia relativa. En efecto el sujeto rechaza dar un juicio porque no sabe qué resultado va a aparecer cuando realice un cierto número de ensayos. En este caso el sujeto opta por un juicio probabilístico a posteriori, y confunde la probabilidad con la frecuencia relativa. Los autores de este trabajo consideran que:

"... en próximas investigaciones será necesario poner en evidencia los obstáculos a la noción de equiprobabilidad. En efecto, nosotros suponemos que la noción de frecuencia relativa se opone a la hipótesis de equiprobabilidad, así como los soportes físicos y concretos de la

equiprobabilidad se oponen a la abstracción y generalización de la noción" (Rouan y Pallascio).

D. Concepción: *Un resultado debe ser representativo de la población de donde fue tomado*

Esta concepción es observable cuando se elige una muestra o se parte de un parámetro estadístico (la media, por ejemplo). Así, si una muestra de una población que contiene varias especies, tiene una sola especie, donde no se respeta la proporcionalidad de los datos, se considera una muestra no representativa. Esta concepción está basa en una correspondencia física entre muestra y población.

Conclusión

Por un lado, los sujetos que no han tenido enseñanza de la probabilidad son más partidarios de la concepción de la representatividad de la población que los otros. Por otro lado, las entrevistas dejan ver una forma de esta concepción más primaria y más fuerte que la que se basa en los parámetros numéricos. Se trataría de una representatividad física y espacial.

E. Concepción: *Un resultado debe seguir el proceso por el cual es obtenido*

Exige a un resultado una representatividad del proceso por el cual es obtenido. Por ejemplo, la elección de una serie de números al azar respeta ciertas normas y reglas, como la de considerar que un orden es poco probable y aún imposible. Así, la combinación 5,7,9,11,13,15 es poco probable en relación con otra que no muestra ninguna regularidad, (lo extraño tiene una probabilidad débil, lo desordenado tiene una probabilidad más fuerte).

Conclusión

Estas concepciones pueden conllevar los obstáculos epistemológicos que se oponen a la noción de suceso elemental.

Otra hipótesis consiste en creer que, ya que los sujetos en sus juicios tienen tendencia a utilizar el modelo frecuencial, estos conocimientos se opondrán al aprendizaje de nociones ligadas al modelo equiprobabilista.

En efecto, es necesario validar que los sujetos construyen conocimientos ligados al modelo probabilista diferentes que los ligados al modelo clásico de equiprobabilidad y que si ellos no son tomados en consideración en la acción didáctica se pueden oponer al aprendizaje de las nociones del modelo equiprobabilista.

6.3.3. *Dificultades de adultos* egresados de/ *nivel medio*

Nuestra experiencia en cursos con adultos muestra que éstos apelan a un tratamiento no probabilístico de los problemas, y al uso indiscriminado de algoritmos conocidos. Esto aparece relacionado con identificaciones incorrectas de casos favorables y de casos posibles.

Ejemplo 1:

En un curso se plantean los siguientes problemas:

1. Se pidió a un grupo de alumnos que calculen, al arrojar simultáneamente 2 monedas iguales de $1, la probabilidad de obtener una cara y una ceca. Un alumno hace el siguiente análisis:

Los posibles resultados son:

- ambas cara
- ambas ceca
- una cara y una ceca

La probabilidad buscada es 1/3.

¿Es correcto el razonamiento del alumno?

2. Se pidió a los alumnos que calculen, al arrojar simultáneamente 2 monedas distintas (una de 50 centavos y una de $1.-), la probabilidad de obtener una cara y una ceca. Un alumno hace el siguiente análisis:

Los posibles resultados son:

- ambas cara
- ambas ceca
- cara la de $1.- y ceca la de 50 centavos
- ceca la de $1.- y cara la de 50 centavos

La probabilidad buscada es 1/4+1/4=1/2.

¿Es correcto el razonamiento del alumno?

3. Se separaron los alumnos en grupos, a la mitad de los grupos se les pidió que realizaran la experiencia 500 veces con dos monedas iguales (por ejemplo de $1), a la otra mitad que la realicen 500 veces con dos monedas distintas (por ejemplo, una de $1 y otra de 50 centavos). Todos los grupos anotaron los resultados obtenidos.

a) Los resultados obtenidos por los alumnos ¿fueron similares para todos los grupos o a partir de las tablas de resultados se pueden distinguir los grupos que usaron monedas iguales de los que usaron monedas distintas?

b. Los resultados de las experiencias fueron similares para todos los grupos, ¿a cuál de los análisis creen que se parecen, al del alumno que analizó la primera experiencia o al que analizó la segunda?

Análisis de las respuestas del ejemplo 1

Un número bastante grande de alumnos del curso dio por válidos los razonamientos de ambos alumnos (en los primeros dos ejercicios). Al pedirles que compararan las experiencias, algunos insistían en que eran experiencias distintas, ya que en el primer caso las monedas eran indistinguibles. Luego de discutir y acordar que el resultado de la experiencia no podía depender de que las monedas fueran iguales o distintas, también se concluyó que el análisis correcto era el del segundo alumno.

Uno de los alumnos preguntó si había una manera de saber a priori si el análisis de una experiencia era o no correcto, a partir de lo cual se discutió que una posible estrategia de análisis era buscar una experiencia equivalente a la dada, en la que los elementos involucrados fueran claramente distinguibles.

Ejemplo 2

En otro curso, luego de haber trabajado con diferentes problemas sobre cálculo de probabilidades y el uso de números combinatorios para "contar" los casos favorables o posibles, se plantearon (en distintos momentos) los siguientes problemas:

1. Se saca una carta de un mazo de 40 cartas españolas. Calcular la probabilidad de que sea el as de espadas.
2. ¿Cuál es la probabilidad de que en una mano de truco, de 4 jugadores, alguno tenga el as de espadas?

Análisis de las respuestas del ejemplo 2

A la primera pregunta, todos contestaron (correctamente) 1/40.

A la segunda pregunta:

a) Algunos contestaron 1/40 sin hacer ningún tipo de análisis más profundo;
b) Algunos plantearon 1/12 (contando las 12 cartas que se repartían como los casos posibles),

c) Algunos calcularon un caso favorable y el combinatorio $\binom{40}{3}$ como número de casos posibles, otros usaron números combinatorios y productos que involucraban, de diferentes maneras, el 40 (número de cartas), el 12 (número de cartas repartidas), el 4 (número de jugadores) y el 3 (número de cartas que recibe un jugador).

d) Otros contestaron 1/40 a partir del siguiente análisis: los casos posibles son 40-39-38, ya que podemos elegir cualquiera de las 40 para la primera carta, cualquiera de las 39 restantes para la segunda y cualquiera de las otras 38 para la tercera. Los casos favorables son l-39-38, ya que elegido (de una única manera el as de espadas, podemos elegir para la segunda carta cualquiera de las otras 39, y para la tercera cualquiera de las restantes 38. Haciendo el cociente, obtenemos 1/40.

e) Otros calcularon $\binom{39}{2}$ casos favorables (elegimos el as de espadas de una única manera, y el combinatorio nos dice de cuántas maneras podemos elegir las otras 2 cartas) y $\binom{40}{3}$ casos posibles (de cuántas manera podemos elegir 3 cartas de un mazo de 40), obteniendo $\frac{39{\cdot}38}{2}$ casos favorables y $\frac{40{\cdot}39{\cdot}38}{3{\cdot}2}$ casos posibles, es decir una probabilidad de 3/40 (que es la respuesta correcta).

En las respuestas **a) y b)** observamos un uso del algoritmo de Laplace, sin ningún análisis de la situación.
En la respuesta **c)** se ve la aplicación de los algoritmos que "deberían estar involucrados" sin hacer un análisis de su aplicabilidad.
En la respuesta **d),** aparece el análisis de la situación, en principio correcto, pero con el error de utilizar secuencias ordenadas. La probabilidad calculada en este caso es la probabilidad de obtener el as de espadas como la primera carta. Si a esta le sumamos, respectivamente, las probabilidades de obtenerlo en la segunda y en la tercera carta, llegamos al resultado correcto de 3/40.
En la respuesta **e)** el análisis y el resultado son correctos.

6.4. Enfoques en la enseñanza

En el primer apartado del artículo citado de Henry, se encuentra una caracterización de dos enfoques diferentes para la introducción del concepto de probabilidad

6.4.1. *El enfoque frecuencial*

En este enfoque, *"el concepto de probabilidad se introduce a través de su relación con la observación del fenómeno de* ***estabilización de frecuencias durante la repetición de una experiencia un gran número de veces".*** Se realiza mediante el estudio de series estadísticas obtenidas de la repetición de una experiencia aleatoria, por lo tanto la probabilidad se conceptualiza mediante su relación con el concepto de frecuencia, el cual, a su vez, encuentra su sentido a través de múltiples ejemplos estadísticos.

En esta presentación, la probabilidad aparece como un instrumento que se integra dentro de la modelización de la experiencia durante la actividad que, en estadística, está centrada en la recogida y organización de datos

6.4.2. *El enfoque laplaciano*

El enfoque clásico, *"lleva el conjunto de los resultados obtenidos en una experiencia aleatoria a un conjunto de casos (espacio muestral) y también modeliza la equiprobabilidad de los sucesos elementales, planteados a priorí por razones de simetría".*

Henry lo denomina enfoque laplaciano, para recordar que fue Laplace quien sistematizó el cálculo de probabilidades tal como esta desarrollado hasta ese momento, a partir de principios o axiomas, el primero de los cuales define la probabilidad como hemos dicho: cociente entre el número de casos favorables y el total de los casos posibles, siempre que estos sean igualmente posibles.
Esta presentación requiere en muchas situaciones, para el estudio de los casos posibles, nociones de combinatoria que permitan atender al conteo exhaustivo y sin repetición.

6.5. Algunas actividades

La enseñanza de las probabilidades en la escuela implica el trabajo con un conjunto de problemas que permitan a los alumnos construir el sentido de las nociones de este campo.
Estos conjuntos de problemas implicarán, en los dos primeros ciclos trabajar con situaciones donde puedan realizar:

- la toma de contacto con fenómenos aleatorios y su diferenciación con los deterministas,
- la identificación de sucesos seguros e imposibles,
- la comparación de posibilidades (utilizando el término posibilidad en lugar de probabilidad cuando no se cuantifique la incertidumbre),

A partir del tercer ciclo, se procurará que los alumnos construyan otras nociones como por ejemplo:

- la asignación de probabilidad a un suceso,
- si varios sucesos son disjuntos, la suma de las probabilidades de cada uno de ellos representa la probabilidad de la unión de los sucesos,
- la probabilidad del suceso contrario -A es 1 - probabilidad de A.

En el marco de las estrategias de enseñanza caracterizadas en la Unidad 1, las situaciones que se presenten implicarán el planteamiento de problemas en los que el conocimiento que se quiere que los alumnos aprendan sea instrumento de resolución. En este caso, se trataría de situaciones en las que el modelo determinista no funcione y por lo tanto deban construir un modelo probabilístico.

6.5.1. *Actividades para los dos primeros ciclos*

Analicemos algunos ejemplos:

1. ¿Qué color elegir?

Un ejemplo de situaciones diseñadas para que los alumnos deban construir un modelo probabilístico, son las propuestas por Bisson y retomadas por Godino, Batanero y Cañizares.

Situación de acción	Ejemplo
El problema deberá configurarse de tal modo que el niño construya la solución eligiéndola entre distintas alternativas y como consecuencia del intercambio de información generado. Se tratará de poner a los estudiantes en estado de construir un modelo probabilístico implícito, por medio de previsiones o decisiones, por ejemplo bajo la forma de apuestas.	El profesor coloca en una caja, delante de los niños, tres discos del mismo diámetro: el primero tiene las dos caras rojas, el segundo las dos azules y el tercero, una roja y una azul. Se van sacando, al azar, sucesivamente, discos de la caja mostrando a los niños el color de una de las caras y pidiéndoles que adivinen el de la otra. En cada paso el disco utilizado se devuelve a la caja. Tras haber repetido la prueba diez veces, el alumno debe completar un cuadro como el siguiente:
	Color de la cara que se ve
	Color de la otra cara
	Mientras se realiza la experiencia un alumno anota el color de la cara oculta en cada extracción sin mostrárselo al resto. Al finalizar comparan sus previsiones con los resultados reales. El objetivo de la situación es que el alumno, basándose en razonamientos probabilísticos determine la estrategia que a su juicio sea la óptima para lograr el mayor número de aciertos.
Situación de formulación	Ejemplo
Para que el alumno exprese el modelo implícito, debe intercambiar información con otros compañeros en una situación en la que unos hagan el papel de emisores y otros de receptores. En un intercambio de mensajes orales o escritos se establecerá un diálogo entre la situación, el sujeto y su interlocutor. B sujeto emisor prueba y controla de este modo su vocabulario, dándole sentido. La introducción de un vocabulario preciso debe permitir a los niños formular las comprobaciones que hacen a propósito de estas observaciones, por ejemplo, identificar los sucesos, designarlos y hablar de su comparación y su medida.	Los alumnos deben formular su estrategia por escrito. Para ello, se organizan en la clase por parejas, uno es emisor y otro es receptor (por lo que no deben estar físicamente juntos). Las estrategias podrían ser: a) tomar siempre rojo b) tomar alternativamente rojo y azul c) tomar el mismo color de la cara mostrada por el profesor. Luego se repite el juego y ambos miembros del equipo juegan utilizando la estrategia propuesta por el alumno emisor. Si ésta se ha expresado correctamente, los resultados de ambos niños deben ser ¡guales. En caso de no ser así discuten el contenido y la interpretación del mensaje hasta ponerse de acuerdo.
Situación de validación	Ejemplo
Se trata de probar la validez de su modelo ante un interlocutor oponente. El alumno deberá demostrar de este modo la validez de su solución, aportando pruebas semánticas y sintácticas.	Supongamos que además de las estrategias ya señaladas aparezcan las siguientes: a) elegir el color contrario al de la cara mostrada b) dar las respuestas al azar c) dos azules, una roja, dos azules, etc., u otra secuencia similar. Se divide la clase en tantos equipos como estrategias formados por los niños partidarios de cada una de ellas. Se organiza entonces una fase de prueba en la que cada equipo defiende su propuesta frente a las restantes, resultando vencedora la que produce mejores resultados

2. Juegos de azar

Pérez Cuenca (1995) presenta un test inicial tomado a alumnos de tercero a sexto grado en que se les preguntaba: si lanzara un dado 100 veces y anotara los resultados, cuántas veces saldría cada número (del 1 al 6). Los resultados correctos han ido del 20% en 3º al 55% en 5º y 6º.

Algunas de las respuestas más descompensadas son (los números anotados son las veces que creen que saldría cada número):

- 5, 10, 15, 60, 5, 5. En mis dados el más probable es el cuatro y el más difícil es el uno.
- 35, 11, 5, 9, 10, 30. Porque cuando juego al rol casi siempre sale el uno.
- 20, 10, 10, 10, 40, 10. El cinco siempre que juego sale más veces y yo pienso que es porque

es mi número de la suerte, el uno me sale muchas veces y los demás pocas.

- 20,10, 50, 5, 0, 15. Yo lo he puesto porque, aunque fuese por casualidad a lo mejor saldrá.
- 4, 2, 3, 20, 30, 40. No sé por qué lo he hecho así pero puede ser que ocurriera.
- 15, 21, 20, 15, 10, 0. No lo sé, porque es suerte, tira uno y sale más y otro menos, eso depende de quién tire.

Los autores destacan aquí que, para los alumnos, "no es fácil entender cómo se puede predecir algo que está relacionado con la suerte".

Pérez Cuenca propone trabajar con juegos habituales de los niños, en algunos casos con algunas variaciones, donde haya un contraste entre lo pensado a priori (no se puede predecir) y lo ocurrido en la repetición sucesiva de experimentos. La característica principal de los juegos debe ser que en ellos haya: sucesos imposibles, sucesos seguros, sucesos posibles tal que no todos tengan la misma posibilidad de ocurrir. Los sucesos con mayor número de posibilidades salen más y por eso la frecuencia relativa con la que ocurren los sucesos es un buen indicador de la estructura probabilística del juego.

Por ejemplo, una versión del juego de la Oca que denomina "La Oca loca".

Cada niño juega con distintos dados: cúbico, tetraédrico, octaédrico. Cada jugador elige un dado y el que lanza el dado tetraédrico le sumará 2 antes de mover, y el que tira el dado octaédrico le restará 2 antes de mover.

Godino y Batanero (1988) proponen una experiencia de lanzamiento de una moneda, utilizando tablas y diagramas de barras para ir consignando los resultados y poder luego comparar las frecuencias.
En la búsqueda de que los alumnos se acerquen al concepto de frecuencia relativa y a su tendencia a estacionarse en ciertos valores, Santaló (1995) plantea la realización de una experiencia: Rojo o verde.
Consiste en mostrar a los alumnos una serie de señales luminosas que, en una determinada proporción (por ejemplo 8:2), se prenden al azar de color rojo o verde. Luego se les pide que anticipen qué color saldrá más veces y la proporción de cada color que aparecerá en una nueva serie, proponiéndoles anotar los que necesiten.

Apelando a los métodos de sorteo, también se puede acercar a los alumnos a la idea de azar y probabilidad, por ejemplo utilizando ruletas con dos (o más) colores, con diferentes combinaciones.

Por ejemplo, se separan los alumnos en dos grupos (A y B). El grupo A gana cada vez que la aguja o bola de la ruleta caiga en rojo, el B cada vez que salga azul. Se les presenta a los grupos dos ruletas y se les pide que elijan con cuál de ellas prefieren jugar y por qué:

- la primera tiene un semicírculo azul y el otro rojo.
- la segunda tiene un cuarto del círculo de color azul (un cuadrante) y las tres cuartas partes rojas.

También se podría incluir un grupo que ganara si sale verde, por ejemplo, o una ruleta que fuera toda de color rojo.

Observamos en estas propuestas que, en general, se plantean situaciones de recurrencia con la idea de frecuencia relativa, como tareas previas al cálculo de probabilidades. Es decir, se pretende acercar a los alumnos a las experiencias aleatorias, apoyándose en los conocimientos previos que tienen relacionados con lo equitativo o no de los juegos de azar. Una vez adquirida la capacidad de reconocer experiencias aleatorias, y de poder comparar probabilidades, se podrá avanzar sobre el cálculo de las mismas.

6.5.2. *Actividades para desarrollar a partir del tercer ciclo*

Presentamos en primer lugar, dos propuestas para un número finito de caos posibles desde el enfoque frecuencial, y luego dos ejemplos en que el número de casos es infinito y el cociente laplaciano se plantea a partir de modelos geométricos, de donde aparece la posibilidad de realizar la aproximación experimental del número pi.

a) Problema: ***Los árboles del bosque***
En el artículo de Henry, se presenta una experiencia de aula realizada a lo largo de tres sesiones de dos horas de trabajo en las que realiza una introducción a la noción de probabilidad con alumnos de 17 años, en un 1º Científico, partiendo de los conocimientos de estadística de los alumnos.

b) El uso de tablas de números al azar y la simulación
Otra herramienta muy útil y ligada fuertemente al enfoque frecuencial es la generación y el uso de tablas de números al azar.

Para que una lista de números pueda ser considerada aleatoria, es necesario que no sea posible encontrar ninguna regla de aparición de estos números, el orden en el que aparecen debe ser imprevisible, y cualquiera debe tener la misma posibilidad que otro de salir la próxima vez.
Para generar tablas de números al azar, Santaló plantea que es posible proceder de alguna de las siguientes formas, por ejemplo, para generar una tabla de 500 números al azar de O a 9:

1) Tomar una guía telefónica y anotar la última cifra del primer número que aparece en 500 páginas (o cualquier elección semejante)
2) Tomar un dado y una moneda, numerar 5 caras del dado del O al 4 y dejar una sin numerar y asignar O a una cara de la moneda y 5 a la otra. Arrojar simultáneamente el dado y la moneda y sumar los resultados (si sale la cara sin numerar del dado el resultado no se tiene en cuenta).
3) Algunas calculadoras tienen una función que permite generar números al azar
4) Elegir un mazo de 40 cartas y asignar a las cartas de cada palo los valores de O a 9. Extraer las cartas con reposición anotando los resultados.

Una vez construidas las tablas, es posible utilizarlas para simular experiencias, es decir, considerar que la tabla de números al azar funciona como si se hubieran anotado los resultados al realizar la experiencia a la que se aplica. Por ejemplo, con una tabla al azar obtenida como las de arriba, se puede simular la experiencia: "Extraer una bolilla de una bolsa donde se han colocado 10 bolillas numeradas del O al 9". Luego se podrá pedir calcular la probabilidad experimental de cualquier suceso de esta experiencia mediante el conteo de los números de la tabla.

Otras experiencias que se pueden simular, y que permiten la comparación entre probabilidad experimental y la probabilidad teórica:

- En un bolillero hay bolillas numeradas del O al 9, se extraen al azar y con reposición 5 bolillas. Calcular la probabilidad de que haya exactamente 2 números iguales.
- Se extraen 2 cartas de un mazo de 40 cartas españolas, calcular la probabilidad de que ambas sean ases.

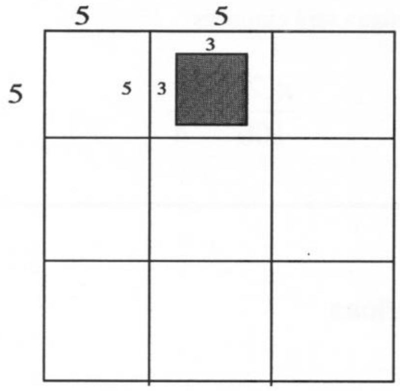
- Se arroja al aire una moneda 5 veces. Calcular experimentalmente la probabilidad de obtener al menos 3 caras.

c) Probabilidades geométricas

En este ciclo se pueden introducir situaciones en que el número de casos es infinito, y por lo tanto no es posible referirse a la fórmula laplaciana.

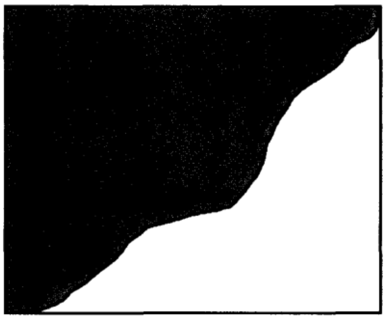
A modo de ejemplo describiremos una situación de estas características, adaptada de la propuesta por Juan Foncuberta (1996) y referida a probabilidades geométricas.

Día de cuadreras
A partir del relato de un domingo de cuadreras en un pueblo, se propone el siguiente juego de apuestas.
Sobre un cuadriculado de 5 cm, tirar una moneda de 1 centavo. Si al caer la moneda no corta ninguna línea, gana. Si no, pierde. ¿Es un juego equitativo si el que gana se lleva dos monedas y el que pierde deja la que apostó?
Es posible analizar este juego mediante modelos geométricos, considerando que para que una recta toque a una circunferencia, el centro debe encontrarse a una distancia menor o igual a la longitud del radio.
Cada cuadrado de la cuadrícula tiene 5 cm de lado, y la moneda 1 cm de radio. Si cae dentro del cuadrado sombreado, gana el jugador.



Por lo tanto su probabilidad de ganancia es P = área del cuadrado chico / área del cuadrado grande = 9/25. No es justo el juego si la apuesta es igual al premio.

Calcular áreas irregulares:
También resulta interesante el trabajo con probabilidades geométricas para calcular áreas como la sombreada:



Con el mismo recurso de dejar caer lentejas sobre la superficie y hacer luego el cociente entre la cantidad que cae en la superficie sombreada y el total de lentejas, se puede obtener un valor aproximado del área.

El número π

Las probabilidades geométricas pueden utilizarse para realizar una aproximación experimental del número π.

Para ello puede proponerse a los alumnos que construyan un cuadrado de 10 cm de lado y un círculo inscripto en el mismo. Dejando caer lentejas sobre ambas figuras puede plantearse, aproximadamente, la siguiente proporción:

$$\frac{N^{\circ}\text{ de lentejas que cubren el círculo}}{N^{\circ}\text{ de lentejas que cubren el cuadrado}} = \frac{\text{Área del círculo}}{\text{Área del cuadrado}}$$

La razón aproximada será entonces

$$\frac{\pi \cdot 25}{100} = \frac{\pi}{4}$$

Referencias bibliográficas

- Batanero, C. Godino, J. y Cañizares, M.: *Azar y probabilidad,* Colección Matemática. Cultura y aprendizaje, Ed. Síntesis, Madrid, Vol. 27,1987.
- Batanero, C. y Serrano, L.: "La aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas", en: uno. *Revista de Didáctica de las Matemáticas,* Barcelona, Grao. Vol. 5, "Probabilidad y Estadística", 1995.
- Chemello, G., Fernández, G. y Gysin, L. *La enseñanza de la probabilidad y la geometría.* Trabajo en preparación.
- Eves, Howard. *An Introductíon to the History of Mathematics,* Saunders Colle-ge Pub, Stony Brook, 1983.
- Fischbein, E. y Schnarch, D. "The Evolution With Age of Probabilistic, Intuiti-vely Based Misconceptions", *Journal ofResearch in Mathematics Edu-cation,* Vol. 28, ?1, NCTM, 1997.
- Foncuberta, J. *Probabilidades y estadística,* Bs. As, Prociencia, Conicet, 1996.
- Gardner, Martín. *Paradojas ¡aja!*
- Gysin, Liliana. "Hacia una mejor comprensión de los CBC de Matemática", en: Los *CBC y la enseñanza de la Matemática,* pp. 41-47, AZ, 1997.
- Gysin, Liliana y Fernández, Graciela. *Una mirada numérica,* AZ, Buenos Aires, 1999.
- Henry, Annie y Michel. "Enfoque frecuentativo de probabilidades en los programas franceses dirigidos a alumnos entre 16 y 18 años", en: Enseñanza *de la Matemáticas: Relación entre Saberes, Programas y Prácticas,* IREM, Francia, 1996.
- Kline, Morris. £/ *pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días, I-11-111,* Alianza Universidad, Madrid, 1972.
- Maury, Sylvette. "La cuantificación de las probabilidades: análisis de los argumentos utilizados por los alumnos en clase de segundo", RDM 5.2, La *penseé sauvage,* 1984.
- Poiya, George, Métodos *Matemáticos de la Ciencia,* DLS-EULER, Madrid, 1994.
- Santaló, Luis A. "Las probabilidades en la educación secundaria", en: Enseñanza efe /as Matemát/cas en *la Educación Secundaría,* Rialp, Madrid, 1995.
- Trabajo realizado sobre el apartado de Probabilidades, del libro *Una mirada numérica,* varios autores, en preparación.
- Pérez Cuenca, R "Actividades de probabilidad para la enseñanza primaria", en: *Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas,* Barcelona, Grao, Vol. 5, "Probabilidad y Estadística", 1995.
- Rouan, O. y Palíaselo, R.: "Concepciones probabilístas de alumnos marroquíes de secundario", *RDM, 14.3,*1994.